

2014

Падение в корем

теоретическое исследование

Проведено теоретическое изучение процесса падения спелеолога в корем. Показано, что возникающая при этом пиковая сила рывка минимум вдвое больше, чем при падении с тем же геометрическим фактором на такой же верёвке, но без нижнего закрепления. Падение в корем на спусковом устройстве оказалось ещё более опасным.



Падение в корем

Станислав Киановский, апрель 2014 г.

Введение.....	3
Основные законы и формулы для расчётов	4
Корем и факторы падения	5
Пиковая сила рывка для простейшей страховочной цепи.....	6
Пиковая сила рывка при падении в корем	7
Случай отсутствия проскальзывания	7
Случай проскальзывания при отсутствии силы трения	8
Промежуточный случай	9
Вычисление пиковой ударной нагрузки в общем случае	13
Анализ полученных результатов	16
Жёсткость верёвки	17
Фактор трения.....	18
Численные результаты	20
Заключение	23
Список литературы.....	24

Введение

В своей книге «Фактор падения в технике SRT» [1] К. Б. Серафимов описывал случай падения в корем, основываясь на логическом анализе и результатах испытаний, проведенных Владом Еремеевым. У меня пока нет возможности провести динамометрические испытания, но мне показалось интересным изучить этот вопрос теоретически. Результаты этого исследования оказались достаточно интересными, и в чём-то неожиданными для меня, поэтому я решил оформить их в виде этой статьи. Скажу сразу, эта статья предназначена почти исключительно для спелеологов использующих технику SRT французской школы. Именно в ней верёвка навешивается в отвес с промежуточными закреплениями. Часто те, кто спускается без самостраховки, надеются на то, что в случае чего дальше корема они не упадут. На тренировках я иногда наблюдал, как некоторые перед спуском пристегивают короткий ус к верёвке, выходящей из спускового устройства. Наверняка они не представляли, какой рывок их ожидает, в случае если они действительно упадут в корем.

Пиковая сила рывка при падении в корем, очевидно, будет определяться высотой падения, длинами ветвей корема, весом падающего и трением в точке подвеса (это может быть как карабин, так и спусковое устройство). Когда я приступал к этой теме, меня интересовали в основном два вопроса:

1. Применимо ли понятие *фактора падения* к падению в корем. Иными словами, останется ли верной формула для силы рывка в простейшей страховочной цепи. Разумеется, фактор падения численно может быть и иным, но также пропорциональным отношению глубины падения к длине (длинам) верёвки.

2. Как влияет трение на пиковую силу рывка – уменьшает её или увеличивает. Например, известно, что сила, действующая на ИНЗ (изменяющее направление закрепление) из-за трения на 20% меньше, чем она была бы в его отсутствие, и логично было бы предположить, что и в случае падения в корем трение уменьшит пиковую силу рывка.

Прежде чем приступить к выводу формул, введу ряд предположений и упрощений, в рамках которых был выполнен расчёт:

1. Падение происходит по вертикальной линии, без какого либо сопротивления до начала натяжения верёвки. Кроме того условимся считать, что в начале падения тело покоится. Это предположение упрощает расчёт полной

энергии системы. Если требуется ввести начальную скорость тела либо сопротивление падению (парашютирующий эффект спускового устройства), то можно ввести понятие *эффективной глубины падения*, которое учтёт необходимые изменения полной энергии системы.

2. Удлинение верёвки прямо пропорционально приложенной к ней силе (закон Гука). Вообще нейлоновые верёвки не подчиняются этому закону, и приходится вводить некий средний коэффициент жёсткости. Это очевидное упрощение, но без него вывод формул усложняется во много раз.

3. Сила трения подчиняется формуле кабестана. Тоже упрощение, так как неизвестно как меняется коэффициент трения при увеличении силы натяжения верёвки.

4. Точки закрепления верёвки находятся на одной вертикальной прямой, вдоль которой происходит падение. Т. е. маятник у нижнего закрепления отсутствует. Упрощение не такое уж и сильное – маятники у закреплений встречаются нечасто. К тому же маятник снизит пиковую силу, а в данной конфигурации сила рывка будет максимальная, т. е. это будет худший из возможных случаев.

Основные законы и формулы для расчётов

Закон Гука:

$$F_H = k\Delta L = \frac{ES}{L}\Delta L = \alpha \frac{\Delta L}{L} = \alpha\lambda$$

где F_H – сила натяжения, k – коэффициент Гука верёвки, E – модуль Юнга материала верёвки, S – площадь поперечного сечения верёвки, α – коэффициент жёсткости верёвки ($\alpha = ES$) (выражается в единицах силы – Н или кгс), L – полная длина верёвки до начала растяжения, ΔL – абсолютное удлинение верёвки, λ – относительное удлинение верёвки.

Потенциальная энергия натянутой верёвки:

$$E_H = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

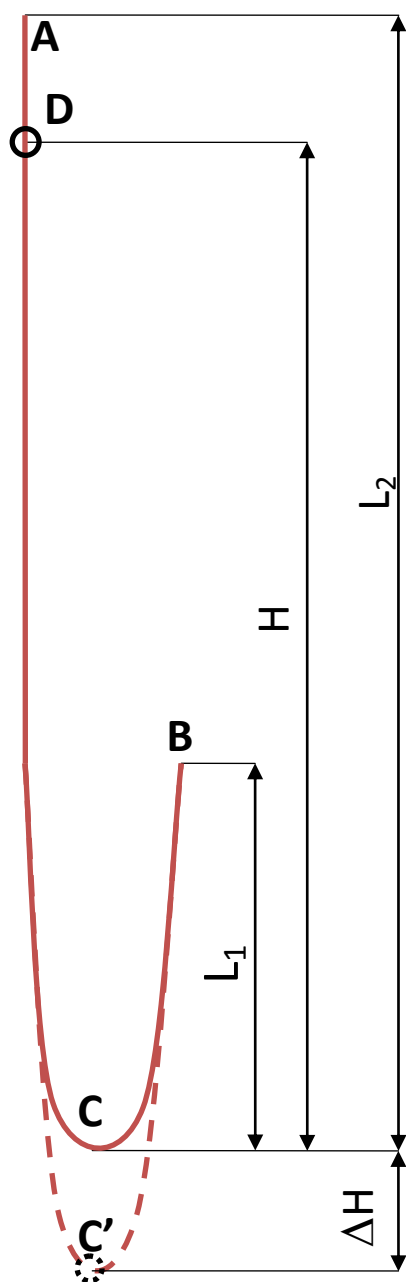
Формула кабестана:

$$F_2 = e^{-\varphi\mu}F_1 = KF_1$$

где F_1 , F_2 – силы натяжения верёвки до и после точки подвеса, φ – угол охвата верёвкой подвеса, μ – коэффициент трения верёвки по материалу подвеса. Здесь

и далее под подвесом (тела) понимается снаряжение, которое соединяет верёвку и падающего – карабин или спусковое устройство. Так как угол охвата и коэффициент трения можно считать постоянными при заданных условиях, то и $e^{-\varphi\mu}$ будет постоянной, которую обозначим через K . По определению $0 \leq K \leq 1$, причем $K = 0$ соответствует бесконечно большому трению, а $K = 1$ – отсутствию трения. Для удобства назовём эту постоянную *фактором трения*.

Корем и факторы падения



На рис. 1 показана типичная схема навески верёвки между двумя промежуточными закреплениями A и B. Длины L_1 и L_2 будем называть длинами короткой и длинной ветвей корема. Суммарная длина верёвки, очевидно будет равна сумме этих длин. Из точки D начинает падать тело. H – глубина этого падения до начала растяжения верёвки. C – самая нижняя точка корема, пока верёвка не растянута. В процессе торможения тела верёвка растягивается, и глубина корема увеличивается на величину ΔH .

Согласно классическому определению, фактор падения равен отношению глубины падения тела к длине верёвки, которая это падение останавливает. Но в случае падения в корем, понятие фактора падения становится не столь однозначным.

Геометрическим фактором падения будем называть фактор падения согласно классическому определению, т. е.:

$$f_{\text{геом}} = \frac{H}{L} = \frac{H}{L_1 + L_2}$$

Локальным фактором падения назовём фактор падения относительно выбранной точки закрепления:

Рис. 1. Схема корема.

$$f_1 = \frac{H}{L_1}$$

$$f_2 = \frac{H}{L_2}$$

При рассмотрении сложной страховочной цепи можно использовать понятие *эффективного фактора падения*. Это такой фактор падения, при котором в простейшей страховочной цепи возникла бы такая же пиковая сила, как и в случае падения в рассматриваемой цепи.

Пиковая сила рывка для простейшей страховочной цепи

Прежде чем решать поставленную задачу полезно потренироваться на задаче, ответ на которую известен. Формула для пиковой силы рывка при падении на глубину H на верёвку данной длины L известна, и приведена в частности в [1] на стр. 17. Напомню, как она выводится.

Тело падает из верхней точки траектории на глубину H свободно. После этого верёвка начинает растягиваться, пока сила её натяжения не остановит падение тела. Это произойдет при растяжении верёвки на величину ΔL . Следовательно, исходная потенциальная энергия тела относительно точки остановки равна:

$$E_{\pi} = G(H + \Delta L)$$

где G – вес тела (в ньютонах или кгс). Поскольку потерями энергии в процессе падения мы пренебрегаем, то после падения вся энергия системы сосредоточена в натянутой верёвке. По закону сохранения энергии:

$$E_{\text{н}} = E_{\pi}$$

Приравниваем обе величины и составляем уравнение на ΔL :

$$\frac{k\Delta L^2}{2} = G(H + \Delta L)$$

$$k\Delta L^2 - 2G\Delta L - 2GH = 0$$

Решаем квадратное уравнение относительно неизвестной ΔL :

$$D = 4G^2 + 8kGH$$

$$\Delta L = \frac{2G + \sqrt{4G^2 + 8kGH}}{2k} = \frac{G}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kH}{G}} \right)$$

Подставляем удлинение в выражение для силы натяжения с учетом выражения для k :

$$F_H = k\Delta L = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kH}{G}} \right) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2ESH}{GL}} \right) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha f}{G}} \right)$$

где f – фактор падения ($f = H/L$).

По третьему закону Ньютона сила, действующая на тело, равна силе натяжения верёвки, т. е. пиковая ударная нагрузка численно равна F_H .

Пиковая сила рывка при падении в корем

Растяжения обеих ветвей корема, улавливающих падающее тело равны по абсолютной величине. Однако, из-за того что короткая ветвь корема имеет больший коэффициент Гука, возникает разность сил натяжения ветвей корема. Эта разность сил стремится протащить верёвку сквозь точку подвеса тела, причём в направлении от длинной ветви к короткой. В частности из-за этого, Стоп, падающий в корем, разблокируется, так как верёвка через него движется в противоположном нормальному направлению и проворачивает подвижный фрикцион против часовой стрелки.

Сила трения в точке подвеса тела препятствует проскальзыванию верёвки. Принципиально существует два крайних случая: случай бесконечно большого трения, когда проскальзывание отсутствует, и случай отсутствия трения, когда проскальзыванию ничто не мешает и силы натяжения ветвей корема равны. Рассмотрим эти случаи по порядку. Будем искать силу F , действующую на тело, в зависимости от фактора трения.

Случай отсутствия проскальзывания

В данном случае можно считать, что обе ветви корема независимы друг от друга и их начальная длина постоянна. Тогда мы имеем систему из двух параллельно соединенных упругих элементов. В этом случае, коэффициент Гука всей системы равен сумме коэффициентов Гука входящих в нее элементов:

$k = k_1 + k_2$. Подставляя это значение в выражение силы для простейшей страховочной цепи, получаем:

$$F(0) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(k_1 + k_2)H}{G}} \right) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{G} \left(\frac{H}{L_1} + \frac{H}{L_2} \right)} \right)$$

$$\boxed{F(0) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha(f_1 + f_2)}{G}} \right)}$$

Как мы видим, в случае отсутствия проскальзывания верёвки через подвес тела в нижней точке корема, эффективный фактор падения сумме локальных факторов.

Случай проскальзывания при отсутствии силы трения

Обозначим L – полную длину верёвки, а ΔL – полное абсолютное удлинение. Тогда из закона сохранения энергии имеем:

$$G(H + \Delta H) = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

где ΔH – дополнительная глубина падения за счет удлинения верёвки. Ввиду отсутствия трения, провис корема в момент остановки падения будет больше на величину:

$$\Delta H = \frac{\Delta L}{2}$$

Составляем уравнение на ΔL :

$$GH + \frac{G\Delta L}{2} = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

$$k\Delta L^2 - G\Delta L - 2GH = 0$$

$$D = G^2 + 8kGH$$

$$\Delta L = \frac{G + \sqrt{G^2 + 8kGH}}{2k} = \frac{G}{2k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8kH}{G}} \right)$$

Так как на подвес действуют силы натяжения обеих ветвей корема (равные), то сила, действующая на тело, будет вдвое больше силы натяжения верёвки:

$$F(1) = 2F_H = 2k\Delta L = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8kH}{G}} \right) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\alpha H}{GL}} \right)$$

$$F(1) = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\alpha f}{G}} \right)$$

Аналогично предыдущему случаю, понятие фактора падения применимо и здесь. Только эффективный фактор падения здесь равен учетверенному геометрическому фактору падения.

Теперь сравним силы в обоих случаях. Логично предположить, что сила в случае без проскальзывания будет больше. Проверим это:

$$\begin{aligned} F(0) &\geq F(1) \\ G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha(f_1 + f_2)}{G}} \right) &\geq G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\alpha f}{G}} \right) \\ f_1 + f_2 &\geq 4f \\ \frac{H}{L_1} + \frac{H}{L_2} &\geq \frac{4H}{L_1 + L_2} \\ \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} &\geq \frac{4}{L_1 + L_2} \\ (L_1 + L_2)^2 &\geq 4L_1 L_2 \\ L_1^2 + 2L_1 L_2 + L_2^2 &\geq 4L_1 L_2 \\ (L_1 - L_2)^2 &\geq 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Как мы видим, действительно, сила, в случае отсутствия проскальзывания, будет не меньше силы при проскальзывании без трения, причём равенство сил возможно, только при условии равенства длин обеих ветвей корема (при этом проскальзывания в любом случае не будет).

Промежуточный случай

Если фактор трения принимает промежуточные значения между 0 и 1, расчёт существенно осложняется. Закон сохранения энергии напрямую здесь неприменим, так как требует учета энергии потраченной на преодоление силы трения. Это, в свою очередь, требует интегрирования силы трения по длине проскользнувшей части верёвки, причем обе эти функции нелинейные. Поэтому я

пошёл другим путем – записал дифференциальное уравнение движения падающего в корем тела, после чего полученное уравнение решал численными методами. Правда для этого всё равно пришлось вывести зависимость силы, действующей на тело от растяжения корема, но эта задача оказалась проще.

В результате этих расчётов обнаружилось, что, несмотря на то, что трение поглощает часть энергии падения, пиковая сила рывка оказывается больше, чем в случае отсутствия трения. Т. е. сила, действующая на тело, будет принимать промежуточные значения между двумя пограничными случаями фактора трения:

$$F(0) \geq F(K) \geq F(1)$$

причем $F(K)$ монотонно убывает, с ростом K от 0 до 1. Этот результат оказался неожиданным для меня, так как я полагал, что сила трения всё же будет снижать пиковую ударную нагрузку. Поэтому я постарался доказать этот результат теоретически.

Для начала попробуем получить этот вывод из физических соображений. На преодоление силы трения уходит часть кинетической энергии падающего тела. Т. е. кинетическая энергия тела израсходуется быстрее, и время остановки тела будет меньше, чем в случае отсутствия трения. Как известно, изменение импульса тела равно импульсу силы, т. е.:

$$\Delta p = Ft$$

где p – импульс тела, F – действующая сила, t – время действия силы. Отсюда следует:

$$F = \frac{\Delta p}{t}$$

т. е. чем быстрее тело останавливается, тем большей величины должна быть сила. Отсюда следует, что из-за того, что трение уменьшает время остановки тела, действующая на тело сила будет больше, чем в случае отсутствия трения. Понятно, что в этих рассуждениях использовалась средняя, а не пиковая сила. Но так как можно ожидать, что характер изменения силы от времени для любых коэффициентов трения будет сходным, то и пиковые силы должны подчиняться тому же соотношению.

И всё же это доказательство меня не удовлетворило. Поэтому перейдем к более строгому доказательству. Начнем с того, что определим длину верёвки, которая проскользнула через подвес при растяжении корема на ΔH без учета трения.

Обозначим: S – искомая длина, L_1, L_2 – длины ветвей корема до растяжения ($L_2 \geq L_1$). Тогда после растяжения получится:

$$\begin{aligned}L'_1 &= L_1 + S \\L'_2 &= L_2 - S \\ \Delta L'_1 &= \Delta H - S \\ \Delta L'_2 &= \Delta H + S\end{aligned}$$

Ввиду отсутствия трения, силы натяжения обеих ветвей корема равны, следовательно, равны и их относительные удлинения. Отсюда получаем уравнение на S :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L'_1}{L'_1} &= \frac{\Delta L'_2}{L'_2} \\ \Delta L'_1 L'_2 &= \Delta L'_2 L'_1 \\ (\Delta H - S)(L_2 - S) &= (\Delta H + S)(L_1 + S) \\ L_2 \Delta H - S L_2 - S \Delta H + S^2 &= L_1 \Delta H + S \Delta H + S L_1 + S^2 \\ S L_1 + S L_2 + 2 S \Delta H + L_1 \Delta H - L_2 \Delta H &= 0 \\ S(L_1 + L_2 + 2 \Delta H) &= \Delta H(L_2 - L_1)\end{aligned}$$

$$\boxed{S = \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{L_1 + L_2 + 2 \Delta H}}$$

Очевидно, что трение будет препятствовать проскальзыванию верёвки, т. е.:

$$S(K) < S, \text{ при } K < 1.$$

Поэтому для доказательства требуемого неравенства достаточно доказать, что F монотонно убывает с ростом S .

Одно из свойств монотонной функции – сохранение знака её производной, причём для монотонно убывающей функции производная отрицательна. Получаем:

$$\begin{aligned}F(S) &= \alpha \left(\frac{\Delta L'_1}{L'_1} + \frac{\Delta L'_2}{L'_2} \right) = \alpha \left(\frac{\Delta H - S}{L_1 + S} + \frac{\Delta H + S}{L_2 - S} \right) \\ \frac{1}{\alpha} \frac{dF(S)}{dS} &= - \frac{L_1 + \Delta H}{(L_1 + S)^2} + \frac{L_2 + \Delta H}{(L_2 - S)^2} \leq 0\end{aligned}$$

Иными словами, требуется доказать неравенство:

$$\frac{L_1 + \Delta H}{(L_1 + S)^2} \geq \frac{L_2 + \Delta H}{(L_2 - S)^2}$$

или:

$$\frac{(L_1 + S)^2}{L_1 + \Delta H} \leq \frac{(L_2 - S)^2}{L_2 + \Delta H}$$

при следующих условиях:

$$L_1 \leq L_2$$

$$0 \leq S \leq \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{2\Delta H + L_1 + L_2}$$

Левая часть неравенства всегда положительна и монотонно возрастает с ростом S . Правая часть неравенства неотрицательна и монотонно убывает с ростом S при условии того, что $S < L_2$. Т. е. данное неравенство имеет смысл доказывать при:

$$L_2 \geq \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{2\Delta H + L_1 + L_2}$$

$$(2\Delta H + L_1 + L_2)L_2 \geq \Delta H(L_2 - L_1)$$

$$\Delta H(L_2 + L_1) + L_1L_2 + L_2^2 \geq 0$$

$$\Delta H(L_2 + L_1) + L_2(L_1 + L_2) \geq 0$$

$$(\Delta H + L_2)(L_1 + L_2) \geq 0$$

Так как все длины положительны, получаем верное неравенство. Т. е. при любом ΔH , S будет меньше L_2 , а значит и правая часть неравенства всегда будет положительна.

Итак, мы имеем неравенство с двумя монотонными функциями: одной возрастающей и одной убывающей. Для доказательства такого неравенства достаточно сравнить значения этих функций на границах их области определения. Если в обеих точках неравенство будет выполняться, значит, оно будет выполняться и на всей области определения.

При $S = 0$.

$$\frac{L_1^2}{L_1 + \Delta H} \leq \frac{L_2^2}{L_2 + \Delta H}$$

Обе части неравенства монотонно падают с ростом ΔH . Доказываем аналогично.

При $\Delta H = 0$: $L_1 \leq L_2$. При $\Delta H \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{\Delta H \rightarrow +\infty} \frac{L_1^2}{\Delta H} \leq \lim_{\Delta H \rightarrow +\infty} \frac{L_2^2}{\Delta H}$$

$$L_1^2 \leq L_2^2 \blacksquare$$

$$\text{При } S = \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{2\Delta H + L_1 + L_2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\left(L_1 + \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{2\Delta H + L_1 + L_2}\right)^2}{L_1 + \Delta H} &\leq \frac{\left(L_2 - \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{2\Delta H + L_1 + L_2}\right)^2}{L_2 + \Delta H} \\
\frac{(L_1(2\Delta H + L_1 + L_2) + \Delta H(L_2 - L_1))^2}{(2\Delta H + L_1 + L_2)^2(L_1 + \Delta H)} &\leq \frac{(L_2(2\Delta H + L_1 + L_2) - \Delta H(L_2 - L_1))^2}{(2\Delta H + L_1 + L_2)^2(L_2 + \Delta H)} \\
\frac{(\Delta HL_1 + \Delta HL_2 + L_1(L_1 + L_2))^2}{L_1 + \Delta H} &\leq \frac{(\Delta HL_2 + \Delta HL_1 + L_2(L_1 + L_2))^2}{L_2 + \Delta H} \\
\frac{((L_1 + L_2)(\Delta H + L_1))^2}{L_1 + \Delta H} &\leq \frac{((L_1 + L_2)(\Delta H + L_2))^2}{L_2 + \Delta H} \\
\Delta H + L_1 &\leq \Delta H + L_2 \blacksquare
\end{aligned}$$

Итак, доказано, что на области определения производная силы F по величине S отрицательна. Это означает, что при увеличении длины верёвки проскользнувшей через подвес, сила, действующая на тело, убывает. Правда, в доказательстве подразумевалось постоянство растяжения корема ΔH . Однако с ростом силы трения растяжение корема будет только уменьшаться, а значит, будет уменьшаться и верхний предел на S , т. е. уменьшение величины растяжения корема только усилит рост пиковой нагрузки.

Вычисление пиковой ударной нагрузки в общем случае

На этом можно было бы остановиться, так как показано, что трение будет лишь усугублять рывок при падении в корем. Однако саму величину рывка мы так и не нашли. Как я уже говорил, мне удалось вычислить его лишь численными методами. Приведу последовательность такого решения.

Так как по исходным предположениям тело движется лишь по вертикали, имеет смысл рассматривать его движение как одномерное. За начало отсчёта координаты тела примем нижнюю точку нерастянутого корема. Тогда имеем следующее уравнение движения:

$$\ddot{x} = \frac{G - F(x)}{m} = g \left(1 - \frac{F(x)}{G} \right)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{2gH}, \text{ при } x = 0 \\ \dot{x} = 0, \text{ при } x = x_{max} \end{cases}$$

Здесь: m – масса тела, g – ускорение свободного падения. Начальная скорость найдена из известной зависимости:

$$H = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\dot{x} = v = gt = g \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH}$$

Требуется найти неизвестную величину x_{max} . Для решения этого уравнения можно использовать различные численные методы. Я выбрал стандартный явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Но, так как этот метод работает только для уравнений первого порядка, исходное уравнение второго порядка пришлось преобразовать в систему из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{v} = g \left(1 - \frac{F(x)}{G} \right) \\ \dot{x} = v \end{cases}$$

Для решения этого уравнения нужно иметь выражение для силы F , в зависимости от растяжения корема, а для этого нужно найти величину S с учётом трения.

Найдём эту величину. Силы натяжения ветвей корема связаны формулой кабестана:

$$F_2 = KF_1$$

Так как коэффициент жёсткости для обеих ветвей одинаков, то относительные удлинения связаны таким же соотношением:

$$\frac{\Delta L'_2}{L'_2} = K \frac{\Delta L'_1}{L'_1}$$

$$\Delta L'_2 L'_1 = K \Delta L'_1 L'_2$$

$$(\Delta H + S)(L_1 + S) = K(\Delta H - S)(L_2 - S)$$

$$S^2 + S(\Delta H + L_1) + \Delta H L_1 = KS^2 - KS(\Delta H + L_2) + K\Delta H L_2$$

$$(1 - K)S^2 + S((1 + K)\Delta H + L_1 + KL_2) - \Delta H(KL_2 - L_1) = 0$$

$$D = ((1 + K)\Delta H + L_1 + KL_2)^2 + 4(1 - K)\Delta H(KL_2 - L_1)$$

$$S = \frac{\sqrt{((1 + K)\Delta H + L_1 + KL_2)^2 + 4(1 - K)\Delta H(KL_2 - L_1)} - ((1 + K)\Delta H + L_1 + KL_2)}{2(1 - K)}$$

$$S(K, \Delta H) = \frac{(1+K)\Delta H + L_1 + KL_2}{2(1-K)} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Delta H(1-K)(KL_2 - L_1)}{((1+K)\Delta H + L_1 + KL_2)^2}} - 1 \right)$$

Проверим граничные случаи фактора трения.

При $K = 1$ получаем:

$$\lim_{K \rightarrow 1} S(K, \Delta H) = \lim_{K \rightarrow 1} \left(\frac{2\Delta H + L_1 + L_2}{2(1-K)} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Delta H(1-K)(L_2 - L_1)}{(2\Delta H + L_1 + L_2)^2}} - 1 \right) \right)$$

Разложим квадратный корень в ряд Тейлора до члена первой степени:

$$\lim_{K \rightarrow 1} S(K, \Delta H) \approx \lim_{K \rightarrow 1} \left(\frac{2\Delta H + L_1 + L_2}{2(1-K)} \left(1 + \frac{4\Delta H(1-K)(L_2 - L_1)}{2(2\Delta H + L_1 + L_2)^2} - 1 \right) \right) = \frac{\Delta H(L_2 - L_1)}{2\Delta H + L_1 + L_2}$$

Получили формулу для S без трения.

При $K = 0$ получаем:

$$S(0, \Delta H) = \frac{\Delta H + L_1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{4\Delta H L_1}{(\Delta H + L_1)^2}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{(\Delta H + L_1)^2 - 4\Delta H L_1} - \Delta H - L_1}{2}$$

$$S(0, \Delta H) = \frac{\sqrt{\Delta H^2 - 2\Delta H L_1 + L_1^2} - \Delta H - L_1}{2} = \frac{|\Delta H - L_1| - \Delta H - L_1}{2}$$

Раскрываем модуль:

$$\begin{cases} S(0, \Delta H) = -L_1, \text{ при } \Delta H > L_1 \\ S(0, \Delta H) = -\Delta H, \text{ при } \Delta H < L_1 \end{cases}$$

Попробуем проанализировать полученный результат. Величина S получилась отрицательной, т. е. верёвка проскальзывает из короткой ветви в длинную. Это может показаться странным, но если вспомнить исходную зависимость, то видно, что при $K = 0$, F_2 также должно быть равно 0. Чтобы это обеспечить требуется, чтобы длинная ветвь оставалась ненапрянутой. А для этого из короткой ветви в длинную должно проскользнуть столько верёвки, на сколько удлинился корем, т. е. $S = -\Delta H$.

Понятно, что с физической точки зрения это невозможно, так как просто нет силы, которая бы обеспечивала движение верёвки в этом направлении. Т. е. данное решение является нефизическим, и требуется скорректировать функцию

$S(K)$ так, чтобы она давала только физически верный результат. Можно заметить, что $S(K)$ больше нуля, если:

$$KL_2 - L_1 > 0$$

$$K > \frac{L_1}{L_2}$$

Т. о. функцию $S(K)$ можно записать в следующем виде:

$$S_{\text{физ}}(K, \Delta H) = \begin{cases} S(K, \Delta H), & \text{при } K > \frac{L_1}{L_2} \\ 0, & \text{при } K \leq \frac{L_1}{L_2} \end{cases}$$

где: $S_{\text{физ}}$ – физически корректная функция S . Получился интересный результат – необязательно иметь нулевой фактор трения для того, чтобы верёвка не проскальзывала через подвес. Достаточно чтобы он был ниже определенной величины, которая равна отношению длин короткой и длинной ветви корема.

Силу, действующую на тело теперь можно вычислить по уже известной формуле ($\Delta H \Leftrightarrow x$):

$$F(K, x) = \alpha \left(\frac{x - S(K, x)}{L_1 + S(K, x)} + \frac{\Delta H + S(K, x)}{L_2 - S(K, x)} \right)$$

После нахождения значения x_{max} , достаточно просто подставить его в выражение для силы, чтобы получить пиковую ударную нагрузку в результате такого падения.

Анализ полученных результатов

Перейдем теперь к анализу достигнутых результатов. Прежде всего, отметим, что падение в корем даст минимум вдвое большую силу рывка, чем при падении с аналогичным фактором на одинарную верёвку. Это уже само по себе является сильным аргументом против сторонников страховки за корем. Однако на деле всё может оказаться ещё хуже, ведь если мы падаем в корем на спусковом устройстве, фактор трения становится очень низким, что ещё больше усилит рывок.

Прежде чем перейти к анализу численных результатов необходимо определиться со значениями параметров входящих в выведенные формулы.

Длина короткой ветви корема L_1 может принимать два значения: 0.5 м – для стандартного корема (длина короткого уса около 50 см) и 1 м – для корема согласно французской школе SRT. Длинная ветвь корема L_2 может иметь различную длину. Для определенности примем её равной 10 метрам. Как правило, расстояния между промежуточными закреплениями нечасто делают больше этой величины. Высота падения, очевидно, не может превышать длину длинной ветви, соответственно геометрический фактор падения будет меньше 1. Масса падающего тела равна 80 кг.

Жёсткость верёвки

Коэффициент α , связывающий силу натяжения верёвки с её удлинением можно вычислить по результатам испытаний верёвки падающим грузом. Воспользуемся для этого известной формулой:

$$F = G \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha f}{G}} \right)$$

и выразим искомый коэффициент через остальные величины:

$$\begin{aligned} \frac{F}{G} - 1 &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha f}{G}} \\ \left(\frac{F}{G} - 1 \right)^2 - 1 &= \frac{2\alpha f}{G} \\ \alpha &= \frac{G}{2f} \left(\left(\frac{F}{G} - 1 \right)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

Таблица 1. Жёсткость веревок.

Верёвка	G, кг	F, кН	f	α , кгс	Источник
динамика 10.5 мм	80	3,3	0,5	739	[1], стр. 38
динамика 10.5 мм	80	4,7	1	955	[1], стр. 39
статика 10.5 мм	80	5,2	0,5	2450	[1], стр. 38
статика 10.5 мм	80	5,4	1	1340	[1], стр. 39
статика 9 мм*	80	8,46	1,54	2458	[2], стр. 14
статика 9 мм*	80	6,23	1,42	1328	[2], стр. 14
статика 9 мм*	80	9,40	1,55	3084	[2], стр. 15
статика 9 мм*	80	7,05	1,47	1707	[2], стр. 15

*Испытания проводились на усах из статической верёвки длиной около 50 см с завязанными на концах узлами восьмерка (первые два) и проводник. Из-за этого, реальная жёсткость верёвки может оказаться несколько больше.

В таблице 1 собраны данные динамических испытаний веревок. Видно, что жёсткость статических веревок имеет большой разброс значений (от 1340 до 3084 кгс), что может быть связано как с условиями испытаний, так и с нелинейностью растяжения реальных веревок. Для дальнейших расчётов я выбрал значение жёсткости равное 2400 кгс. Так как сила прямо пропорциональна жёсткости, то полученные результаты легко пересчитать на любой другой коэффициент α просто умножив полученную мной силу на отношение коэффициентов. Например, если предположить, что верёвка корема динамическая с коэффициентом жёсткости 739 кгс, то сила рывка будет в 3.25 раз меньше чем рассчитанная мной.

Фактор трения

Хотя я рассчитывал силы во всем диапазоне значений фактора трения, представляет интерес определить его типичные значения. Имеет смысл рассматривать две возможные ситуации: падение в корем на карабине и на спусковом устройстве.

При падении на карабине угол его охвата верёвкой можно считать постоянным и равным 180°. Поэтому фактор трения будет зависеть только от коэффициента трения верёвки по карабину. При падении на спусковом устройстве фактор трения зависит также и от заправки верёвки, но в любом случае он будет меньше, чем у карабина.

Определить фактор трения можно при прямых испытаниях. Коэффициент трения из данных испытаний можно рассчитать, если выразить его через формулу кабестана:

$$K = e^{-\mu\varphi}$$

$$-\mu\varphi = \ln K$$

$$\mu = -\frac{\ln K}{\varphi}$$

В апреле 2013 года я провел такое испытание. Его результаты собраны в таблице 2. Из нее следует что, во-первых, коэффициент трения веревок о рэк из нержавеющей стали составляет 0,15 – 0,19; а во-вторых, фактор трения не превышает 0,1. Возможно, для некоторых других спусковых устройств он будет больше, но он не должен быть существенно больше, так как иначе при спуске на таком спусковом устройстве на тормозящую руку будет приходиться большая нагрузка.

Таблица 2. Статический коэффициент трения веревок о Азиан-рэк ($G = 89$ кг).

Верёвка	Заправка	Нагрузка на тормозящую руку, кг	Угол трения, °	μ	K
10 мм статика старая жесткая	3 перекладины и гипербар	8,2	720	0.1898	0,092
10 мм статика старая жесткая	4 перекладины и гипербар	5,5	900	0.1772	0,062
10 мм статика старая мягкая	4 перекладины и гипербар	8,0	900	0.1534	0,090
10 мм статика новая	4 перекладины и гипербар	8,0	900	0.1534	0,090
11 мм динамика	4 перекладины и гипербар	4,2	900	0.1944	0,047
5 мм репшнур	5 перекладин и гипербар	5,2	1080	0.1507	0,058

С другой стороны, фактор трения в спусковом устройстве при падении в корем может заметно измениться из-за изменения направления натяжения выходящей из него верёвки. Так, например, если использовать Стоп без сервисного карабина, то верёвку, выходящую из него, следует натягивать вниз. При падении в корем, верёвка натягивается вверх, а это приводит к тому, что она частично перестает охватывать неподвижный фрикцион и начинает охватывать стопорную шпильку в передней части Стопа. Фактор трения при этом может возрасти. Другой пример: при падении на решетку, натяжение верёвки снизу вверх приводит к смыканию перекладин, что серьезно увеличивает торможение, а значит и приближает фактор трения к нулю.

Впрочем, как я уже показывал, для того, чтобы падение было без проскальзывания, вовсе необязательно, чтобы фактор трения был нулевой. Достаточно чтобы он был меньше отношения длин короткой и длинной ветвей. А так как длина длинной ветви обычно бывает не больше 10 метров, то и минимальный фактор трения будет не больше 0.05 – 0.1 (в зависимости от длины короткой ветви). Даже если фактор трения будет больше этого значения, всё равно результирующая сила будет достаточно близка к максимальной.

При падении на карабин, если использовать коэффициент трения равный 0.15, фактор трения получается равным 0.62. Это вполне согласуется с известным результатом – нагрузка на ИНЗ в 1.6 ($1 + 0.6$) раз больше веса тела.

Численные результаты

Теперь, наконец, можно посмотреть результаты моих расчётов. Все силы далее выражены в кгс. На рис. 2 приведены графики пиковой ударной силы от фактора трения для двух различных длин короткой ветви L_1 – 0,5 м и 1 м. Геометрические факторы падения будут составлять 0,67 и 0,64 соответственно. Для падения на карабин силы в обоих случаях будут близки и порядка 1200 кгс. Для случая падения на спусковом устройстве различия сил будет больше. Если принять фактор трения в спусковом устройстве равным 0.15, то пиковые силы будут равны 1740 и 1620 кгс. Любопытно отметить, что для короткой ветви равной 0.5 м максимальное пиковое усилие будет больше 24 кН, т. е. больше стандартной прочности карабинов. Для сравнения, сила при падении на этой же верёвке с тем же фактором (0.67), но без нижнего закрепления равна 593 кгс.

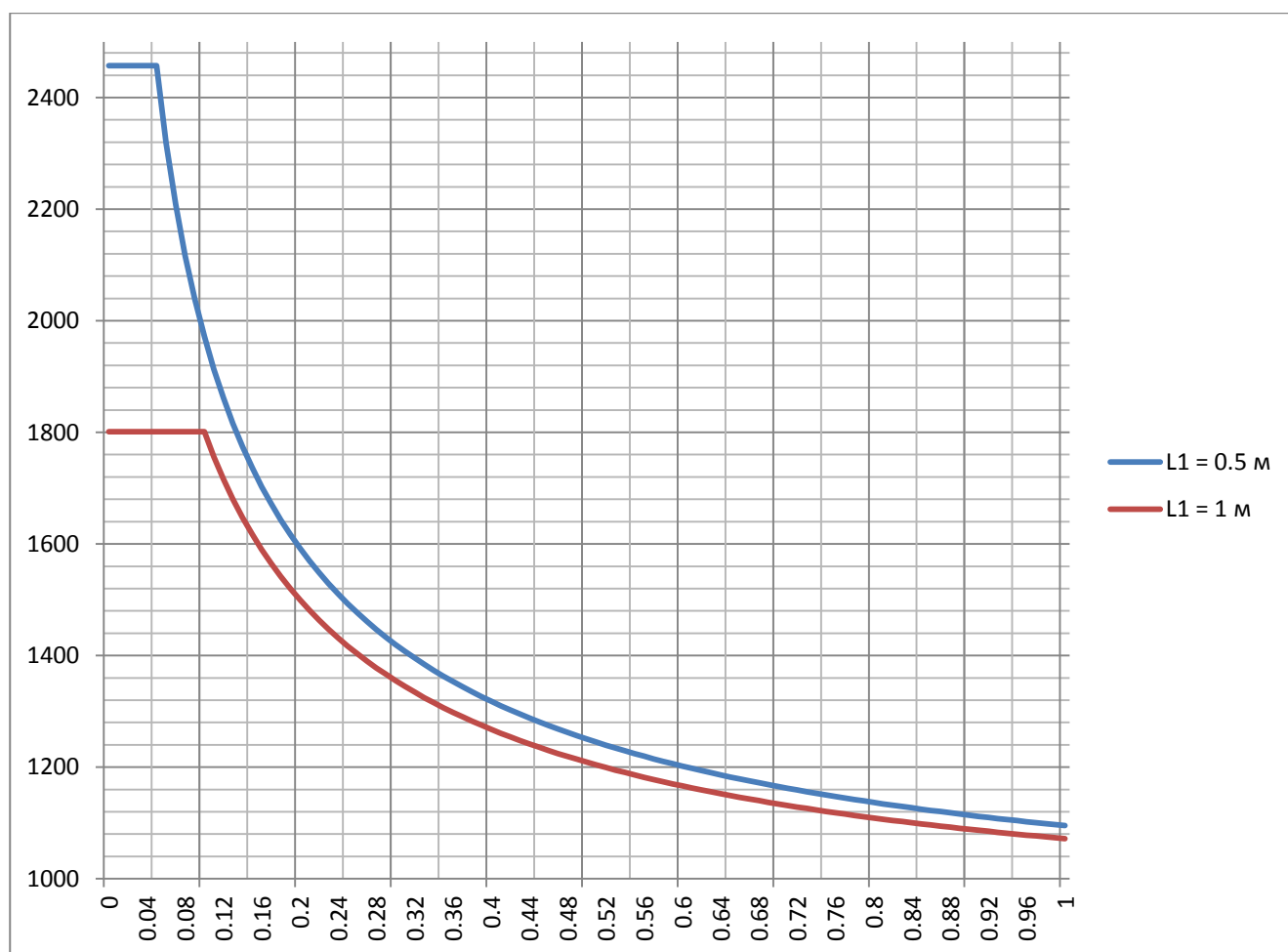


Рис 2. Зависимость пиковой силы рывка от фактора трения ($\alpha = 2400$ кгс, $H = 7$ м, $L_2 = 10$ м)

На следующем рисунке представлены графики сил в обеих ветвях корема от фактора трения. Из него видно, что рывок принимает в основном короткая ветвь.

Сила её натяжения может достигать 1500 кгс при падении на спусковом устройстве, и если сама верёвка и выдержит (что не факт, учитывая, что часто применяют далеко не новые верёвки), могут возникнуть повреждения её оплетки фрикционами спускового устройства.

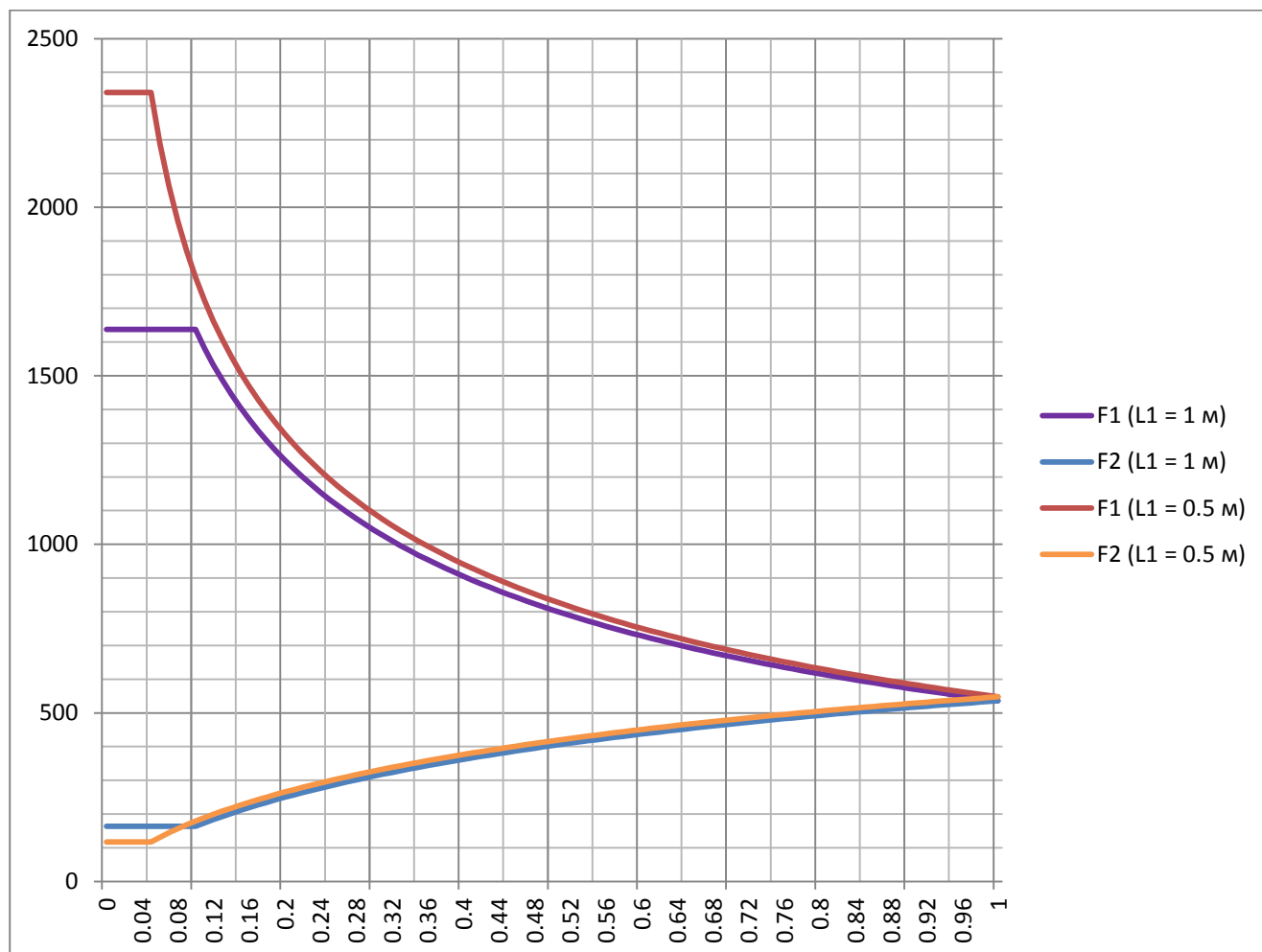


Рис. 3. Силы натяжения ветвей корема от фактора трения ($\alpha = 2400$ кгс, $H = 7$ м, $L_2 = 10$ м)

На рисунке 4 приведены графики пиковой силы удара в зависимости от геометрического фактора падения для различных факторов трения. Можно заметить, что характер изменения для всех факторов трения силы практически одинаков и графики отличаются, по сути, константным множителем. Т. е. понятие фактора падения может быть применено и в произвольном случае падения в корем, но эффективный фактор падения будет равен произведению геометрического фактора падения на некоторый множитель, зависящий от параметров корема и фактора трения. Можно было бы на основании численных расчётов вывести эмпирическую формулу этого множителя, но я пока считаю, что в этом нет практической необходимости.

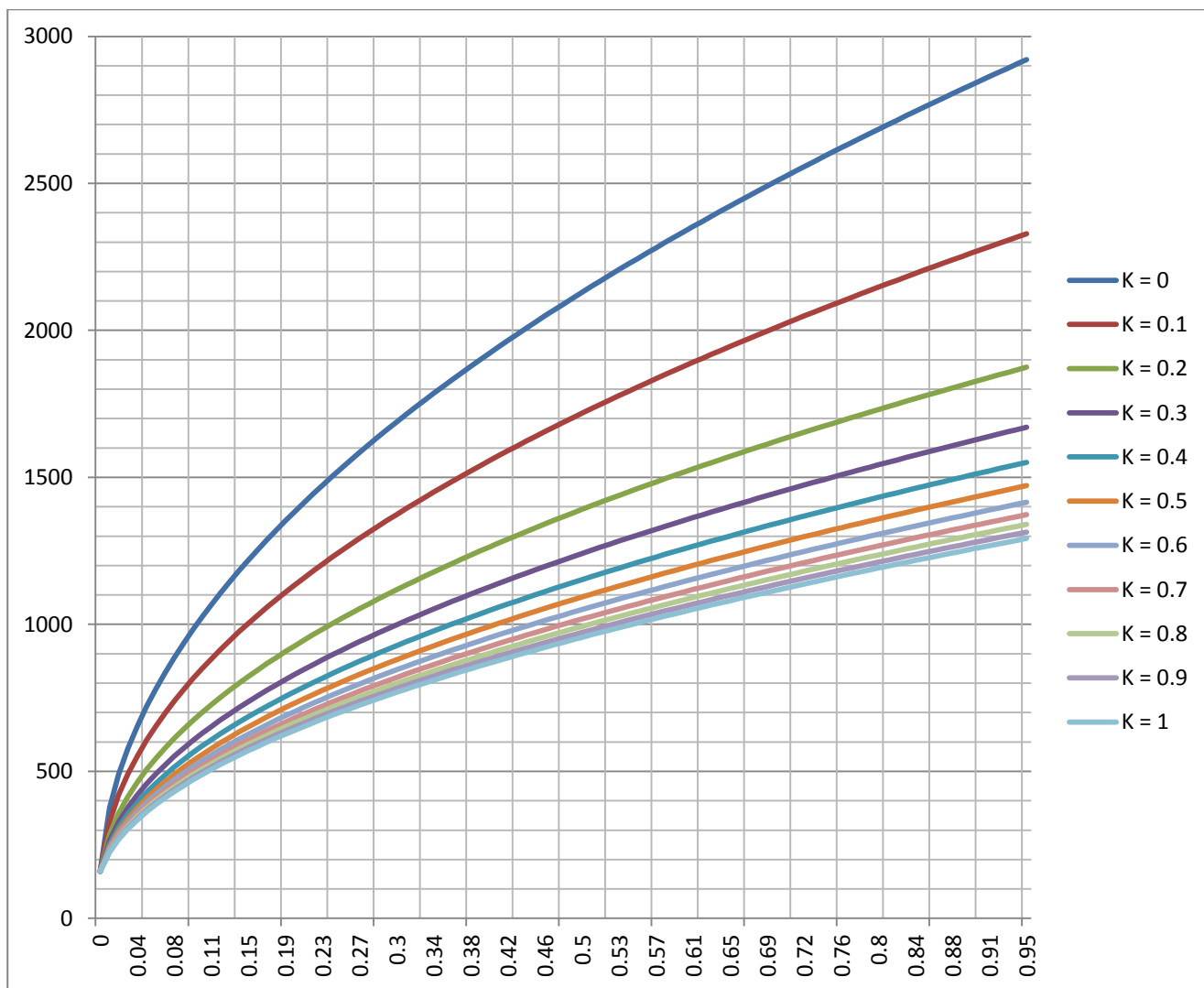


Рис. 4. Зависимость пиковой силы от геометрического фактора падения для разных факторов трения ($\alpha = 2400$ кгс, $H = 7$ м, $L_1 = 0.5$ м, $L_2 = 10$ м)

Падение в корем может быть более-менее безопасным только в одном случае – при падении вблизи нижнего закрепления. Реальный рывок в этом случае будет существенно меньше из-за эффекта границы H_0 и энергоёмкости человеческого тела. Энергия падения в этом случае приблизительно равна GH и составит 40 кГм для корема глубиной 0.5 м, и 80 кГм для метрового корема. Если принять энергоёмкость человеческого тела равной 20 кГм (значение приведено в [1], стр. 55), то эффективные высоты падения будет равна 0.25 и 0.75 м соответственно. Отсюда можно получить оценку на силы рывка для худшего случая: 536 и 649 кгс соответственно. Так что корем оптимальной глубины всё же безопаснее.

Заключение

По полученным результатам можно сделать ряд выводов:

1. Падение в корем в лучшем случае равносильно падению с четырехкратным фактором падения относительно падения на той же верёвке, но без нижнего закрепления. В худшем случае эффективный фактор падения равен сумме локальных факторов относительно верхнего и нижнего закрепления.

2. Трение верёвки о карабин или спусковое устройство в нижней точке корема не уменьшает, а наоборот увеличивает пиковую силу рывка, причем, чем больше трение, тем больше пиковая сила приближается к худшему случаю. Падение в корем на любом спусковом устройстве приведет если не к худшему случаю рывка, то к близкому к нему.

3. Основной удар приходится по короткой ветви корема и нижнему закреплению. Возникающая при этом сила может превышать 1500 кг, что ставит под угрозу целостность закрепления и верёвки или её оплётки.

4. Хотя более глубокий корем и даёт меньшую силу рывка при падении без проскальзывания, безопаснее всё же корем оптимальной глубины, так как он дает меньшую пиковую силу удара при падении от уровня нижнего закрепления (за счёт эффекта границы H_0 и энергоёмкости человеческого тела). А при падении на большую глубину сила удара в любом случае будет слишком высока для благополучного исхода.

Общий вывод, который можно сделать, прост – не падайте в корем. Корем служит лишь для удобства прохождения промежуточного закрепления, и рассматривать его как средство самостраховки не стоит. Максимум, что он сможет сделать – это удержать от падения на самое дно, да и то не всегда – в самых тяжелых случаях сила рывка может превышать прочность карабинов или верёвки. Можно, конечно, надеяться на смягчающие факторы, такие как маятник у промежуточного закрепления и парашютирующий эффект спускового устройства, но не лучше ли вообще не доводить до падения в корем, применяя надёжные средства самостраховки [3].

Список литературы

- [1] К. Б. Серафимов, «Самостраховка при спуске по веревке: Фактор падения в технике SRT,» 20 Август 2007. [В Интернете]. Available: <http://www.soumgan.com/srt/descriptions/Faktor.htm>.
- [2] "Series of tests on Cow's Tails used for progression on semi-static ropes,," June 2006. [Online]. Available: http://www.irata.org/pdf_word/lanyardtest.pdf.
- [3] К. Б. Серафимов, «Официальное представление Самостраховочного Курка "Рефлекс" на основе "Ascension" фирмы "Petzl",» 22 Февраль 2007. [В Интернете]. Available: <http://www.soumgan.com/srt/descriptions/Trigger-Reflex.htm>.